

IMPACTO DA ESCOLHA DA FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA NA ESTIMATIVA DE INCERTEZA E INFERÊNCIA DOS PARÂMETROS DE UM MODELO DE INTERCEPTAÇÃO

Debora Yumi de Oliveira^{1} & Pedro Luiz Borges Chaffe² & João Henrique Macedo Sá³*

Resumo – O uso da inferência bayesiana na quantificação da incerteza e estimativa dos parâmetros de modelos hidrológicos requer a seleção de uma função de verossimilhança que represente adequadamente os resíduos do modelo. Este trabalho tem por objetivo avaliar o uso de diferentes funções de verossimilhança na calibração de um modelo de interceptação simplificado, utilizando dados horários de chuva interna. Modelos para os resíduos com crescente complexidade foram considerados, sendo as seguintes características acrescentadas sequencialmente: inflação da distribuição com zeros, heteroscedasticidade, curtose e autocorrelação. Os resultados foram avaliados de acordo com a qualidade da faixa de incerteza e a verificação das premissas assumidas para os resíduos. As funções de verossimilhança que consideram heteroscedasticidade e uma distribuição dos resíduos inflada com zeros apresentaram melhores resultados. Os resultados deste trabalho confirmam que a utilização de uma função de verossimilhança cujas premissas sobre os resíduos sejam ao menos parcialmente satisfeitas melhora a confiabilidade da incerteza estimada. Entretanto, a incorporação de autocorrelação no modelo para os resíduos necessita de estudos mais aprofundados.

Palavras-Chave – estimativa de incerteza, inferência Bayesiana, função de verossimilhança

IMPACT OF THE LIKELIHOOD FUNCTION ON THE PREDICTIVE UNCERTAINTY AND PARAMETER INFERENCE OF A RAINFALL INTERCEPTION MODEL

Abstract – The use of Bayesian inference for uncertainty quantification and parameter estimation of hydrological models requires the definition of a likelihood function that properly represents the model residuals. The aim of this paper is to assess the impact of different likelihood functions on the calibration of a rainfall interception model by using hourly throughfall data. The following characteristics were sequentially considered in the residual model formulation: zero-inflated distribution, heteroscedasticity, kurtosis and autocorrelation. The results were evaluated with respect to the quality of the predictive uncertainty and the fulfillment of the assumptions about the model residuals. The likelihood functions that assume heteroscedastic and zero-inflated errors provided better results. Our results confirm that the use of a likelihood function that more closely describes the model residuals improve the reliability of the predictive uncertainty. However, the incorporation of autocorrelation in the residual model needs further investigation.

Keywords – uncertainty quantification, Bayesian inference, likelihood function

¹ Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental – PPGEA, Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, debora.ydo@gmail.com.

² Departamento de Engenharia Sanitária e Ambiental, Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, pedro.chaffe@ufsc.br

³ Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental – PPGEA, Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, joao.h.sa@posgrad.ufsc.br

* Autor Correspondente

INTRODUÇÃO

A estimativa das incertezas associadas aos resultados de uma simulação é uma parte fundamental do processo de modelagem, transmitindo maior confiabilidade às previsões e permitindo identificar componentes do modelo que precisam ser aprimorados. Uma forma de se obter esta faixa de incerteza é a partir da combinação das saídas do modelo (componente determinístico) com um modelo para os resíduos (componente probabilístico). Nesta abordagem, os diferentes erros envolvidos no processo de modelagem (e.g. erros nos dados monitorados, erros na estrutura dos modelos, erros nas forçantes do modelo) são agregados e representados através de uma distribuição de probabilidade.

A inferência bayesiana permite a estimativa conjunta dos valores dos parâmetros do modelo e da incerteza associada às simulações. Segundo o teorema de Bayes, a distribuição posterior de um conjunto de parâmetros $P(\mathbf{x}|\hat{\mathbf{Y}})$ – sendo \mathbf{x} o conjunto de parâmetros e $\hat{\mathbf{Y}}$ as observações – pode ser obtida a partir da atualização da distribuição *a priori* dos parâmetros $P(\mathbf{x})$ com a função de verossimilhança $P(\hat{\mathbf{Y}}|\mathbf{x})$, i.e., $P(\mathbf{x}|\hat{\mathbf{Y}}) \propto P(\mathbf{x}) P(\hat{\mathbf{Y}}|\mathbf{x})$. A função *a priori* sumariza o conhecimento sobre os valores dos parâmetros antes da obtenção de qualquer informação sobre os dados $\hat{\mathbf{Y}}$. A função de verossimilhança mede em termos probabilísticos a distância entre as saídas do modelo e as observações. A distribuição posterior dos parâmetros é utilizada para determinação da incerteza associada aos parâmetros do modelo. A faixa de incerteza total é obtida a partir da adição ao valor simulado de um valor amostrado da distribuição de probabilidade assumida para os resíduos.

A principal dificuldade da utilização da inferência bayesiana para estimativa dos parâmetros e incerteza das simulações reside na formulação de uma função de verossimilhança que represente os resíduos de maneira adequada. A violação das premissas assumidas para os resíduos resulta em valores não confiáveis para os parâmetros e para os intervalos de incerteza (Thyer *et al.*, 2009; Schoups e Vrugt, 2010; Smith *et al.*, 2010; Kavetski *et al.*, 2011; Smith *et al.*, 2015). Na modelagem hidrológica, os resíduos são geralmente heteroscedásticos e autocorrelacionados (Schoups e Vrugt, 2010). Além destas características, Smith *et al.* (2010) constatou que para bacias efêmeras a distribuição dos resíduos é inflada de zeros devido ao grande número de observações nulas, o que dificulta a utilização de funções de verossimilhança baseadas em uma única distribuição de probabilidade para todos os resíduos. Muitos estudos vêm sendo conduzidos visando incorporar heteroscedasticidade (Schoups e Vrugt, 2010; Cheng *et al.*, 2014; McInerney *et al.*, 2017), autocorrelação (Schoups e Vrugt, 2010; Evin *et al.*, 2013) e distribuição inflada com zeros (Smith *et al.*, 2010) nos modelos para os resíduos.

Este trabalho tem por objetivo avaliar o uso de diferentes funções de verossimilhança na calibração de um modelo de interceptação simplificado, utilizando dados horários de chuva interna. Devido à escala temporal de ocorrência do processo, a série é caracterizada pela presença de muitas observações nulas. Visando ampliar a aplicabilidade da *Generalized Likelihood function* apresentada por Schoups e Vrugt (2010), nós propomos uma modificação desta função de verossimilhança com tratamento separado de resíduos nulos. Esta modificação teve como base o procedimento utilizado por Smith *et al.* (2010) no desenvolvimento de uma função de verossimilhança para a modelagem hidrológica de bacias efêmeras.

MATERIAIS E MÉTODOS

Modelo de interceptação

O modelo de Rutter (Rutter *et al.*, 1971) foi utilizado para simulação da variação da chuva interna ao longo do tempo. Este modelo considera que a vegetação se comporta como um tanque de armazenamento, que tem como entrada a chuva interceptada pela vegetação (aP , em que a é um parâmetro relacionado à eficiência de interceptação) e as saídas ocorrem por drenagem (D) e

evaporação (E). Uma formulação simplificada para o cálculo da taxa de drenagem da copa foi considerada: $D = b(S - c)$, em que b é um parâmetro de drenagem da copa, S é o armazenamento e c representa a capacidade de armazenamento (Vrugt *et al.*, 2003). A taxa de evaporação varia conforme a quantidade de água armazenada na vegetação: $E = dE_p S/c$, sendo d um parâmetro de eficiência da evaporação e E_p a evaporação potencial; assumindo um valor máximo quando a copa está saturada ($S = c$). O balanço de água armazenada na copa é dado por:

$$\frac{dS}{dt} = aP - b(S - c) - dE_p \frac{S}{c} \quad (1)$$

O método de Euler implícito foi utilizado para resolução da Eq. 1 considerando um passo de simulação de 1 min.

Área de estudo e dados

A área de estudo é a bacia experimental do rio Araçuaia (Mota *et al.*, 2017). A bacia está localizada no município de Rio Negrinho, norte do estado de Santa Catarina, e é coberta por vegetação nativa secundária. Os dados de chuva total e chuva interna com 5 minutos de resolução temporal foram monitorados na bacia experimental de 26/02/2014 a 06/10/2014 (Sá, 2015). A evaporação potencial diária foi considerada como sendo igual a 4 mm d⁻¹. A série de dados foi separada em eventos de precipitação considerando um período seco de 12 horas entre um evento e outro, assumido como sendo suficiente para secagem completa da copa. Os 59 eventos resultantes foram classificados em ordem crescente de chuva total e redistribuídos de maneira alternada em duas séries (série A e série B) que foram utilizadas para calibração e validação do modelo de interceptação. Os dados foram acumulados para obtenção de uma série com resolução temporal de 1 hora. As séries A e B são compostas por 51% e 40% de observações iguais a zero, respectivamente.

Inferência dos parâmetros e estimativa incerteza

O algoritmo de calibração automática *differential evolution adaptive Metropolis* – DREAM (Vrugt *et al.*, 2008; 2009; Vrugt, 2016) foi utilizado para obtenção dos valores dos parâmetros do modelo e da faixa de incerteza associada às simulações. Os valores iniciais dos parâmetros foram amostrados de uma distribuição uniforme com os limites especificados conforme apresentado na Tabela 1. A série A foi utilizada na calibração e a validação foi realizada com a série B.

Tabela 1. Intervalos dos parâmetros do modelo de interceptação utilizados como informação prévia na calibração.

Parâmetro	Descrição	Mín.	Máx.	Unidade
a	Eficiência de interceptação	0,1	1,0	-
b	Parâmetro de drenagem da copa	1,0	1000,0	d ⁻¹
c	Capacidade de armazenamento da copa	0,1	10,0	mm
d	Eficiência de evaporação	0,1	5,0	-

Uma das especificações requeridas pelo DREAM é a função de verossimilhança a ser utilizada. Neste trabalho, foi analisado o uso de funções de verossimilhança com crescente complexidade do modelo para os resíduos (Tabela 2). A primeira função de verossimilhança testada (L1) é comumente empregada em estudos de modelagem hidrológica e foi utilizada como base para comparação com as demais. A partir de L1, as seguintes características foram consideradas sequencialmente: inflação da distribuição com zeros (L2); heteroscedasticidade (L3); distribuição não gaussiana (L4) e autocorrelação (L5). Na consideração de uma distribuição inflada com zeros, os resíduos são divididos em três categorias: resíduos nulos, resíduos não nulos para observações nulas, e resíduos não nulos quando a observação é não nula. A distribuição dos resíduos é uma composição da distribuição assumida para cada uma destas categorias (Smith *et al.*, 2010). A heteroscedasticidade foi considerada a partir da inclusão de um modelo linear para o desvio padrão dos resíduos: $\sigma_t = \sigma_0 + \sigma_1 \hat{y}_t(\mathbf{x})$, em que \hat{y}_t é o valor simulado com o conjunto de parâmetros \mathbf{x} e σ_0 e

σ_1 são os coeficientes linear e angular, respectivamente. Para considerar uma distribuição não gaussiana para os resíduos, foi utilizada a *Generalized Likelihood function* (Schoups e Vrugt, 2010), que possui parâmetros de curtose e *skewness*. Apenas o parâmetro de curtose foi calibrado, sendo que o parâmetro de *skewness* foi mantido igual a 1 (distribuição simétrica). Um modelo autoregressivo de primeira ordem foi utilizado para consideração de autocorrelação dos resíduos (Schoups e Vrugt, 2010).

Tabela 2. Premissas sobre os resíduos e funções de verossimilhança correspondentes.

#	Premissas	log da função de verossimilhança
L1	Erros gaussianos, homoscedásticos e independentes	$\ell = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - n \log(\sigma) - \frac{1}{2} \sigma^{-2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$
L2	Erros gaussianos, homoscedásticos, independentes e inflados com zero	$\ell = n_1 \log(\rho) + n_2 \log(1 - \rho) - n_2 \log(2\pi\sigma) - \frac{1}{2} \sigma^{-2} \sum_{t_2=1}^{n_2} \varepsilon_{t_2}^2 + \dots$ $\dots - n_3 \log(2\pi\sigma) - \frac{1}{2} \sigma^{-2} \sum_{t_3=1}^{n_3} \varepsilon_{t_3}^2$
L3	Erros gaussianos, heteroscedásticos, independentes e inflados com zero	$\ell = n_1 \log(\rho) + n_2 \log(1 - \rho) - n_2 \log(2\pi\sigma_{t_2}) - \frac{1}{2} \sigma_{t_2}^{-2} \sum_{t_2=1}^{n_2} \varepsilon_{t_2}^2 + \dots$ $\dots - n_3 \log(2\pi\sigma_{t_3}) - \frac{1}{2} \sigma_{t_3}^{-2} \sum_{t_3=1}^{n_3} \varepsilon_{t_3}^2$
L4	Erros não-gaussianos, heteroscedásticos, independentes e inflados com zero	$\ell = n_1 \log \rho + n_2 \log(1 - \rho) + n_2 \log \frac{2\sigma_\xi \omega_\beta}{\xi + \xi^{-1}} - \sum_{t_2=1}^{n_2} \log \sigma_{t_2} - c_\beta \sum_{t_2=1}^{n_2} a_{\xi, t_2} ^{2/(1+\beta)} + \dots$ $\dots n_3 \log \frac{2\sigma_\xi \omega_\beta}{\xi + \xi^{-1}} - \sum_{t_3=1}^{n_3} \log \sigma_{t_3} - c_\beta \sum_{t_3=1}^{n_3} a_{\xi, t_3} ^{2/(1+\beta)}$
L5	Erros não-gaussianos, heteroscedásticos, autocorrelacionados e inflados com zero	

n é o número total de observações, n_1 é o número de observações nulas simuladas com erro igual a zero, n_2 é o número de observações nulas simuladas com erro diferente de zero, n_3 é o número de observações não nulas, $\rho = n_1/(n_1 + n_2)$, σ é o desvio padrão dos resíduos ε_i , $\sigma_t = \sigma_0 + \sigma_1 \hat{y}_i(\mathbf{x})$, $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i(\mathbf{x})$, β é o parâmetro de curtose, ξ é o parâmetro de *skewness*, σ_ξ , ω_β e c_β são calculados a partir dos parâmetros β e ξ . Para L5, $\varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + a_t \sigma_t$, sendo ϕ_1 o parâmetro do modelo autoregressivo.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Avaliação da faixa de incerteza dos parâmetros

A distribuição posterior para os parâmetros é apresentada na Figura 1. Dois comportamentos distintos podem ser observados: um para as funções de verossimilhança que consideram que os resíduos são homoscedásticos (L1 e L2); e outro quando a heteroscedasticidade é incluída (L3, L4 e L5). A consideração de autocorrelação dos resíduos (L5) resultou em uma maior incerteza para o parâmetro d do modelo de interceptação, que pode ter sido consequência da correlação deste parâmetro com o parâmetro do modelo autoregressivo (resultado não apresentado).

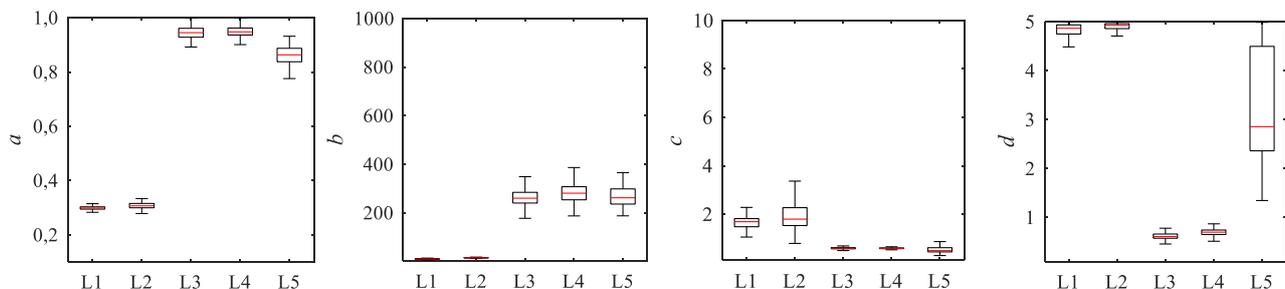


Figura 1. Distribuição posterior para os parâmetros do modelo de Rutter após calibração com cada uma das funções de verossimilhanças analisadas (L1 a L5) e com a série de dados A. Os diagramas de caixa foram construídos utilizando as últimas 3.000 amostras geradas pelo algoritmo DREAM após convergência para uma distribuição estacionária. A mediana é apresentada em vermelho, os limites da caixa representam os percentis 25 (q_1) e 75 (q_3) e as hastes se estendem até $q_1 - 1,5 (q_3 - q_1)$ e $q_3 + 1,5 (q_3 - q_1)$.

Avaliação da faixa de incerteza das simulações

A incerteza associada ao resultado das simulações foi quantificada a partir da utilização de dois índices: a confiabilidade (Smith *et al.*, 2010), que representa a proporção de dados observados englobados pela faixa de incerteza (Figura 2); e um índice de precisão (McInerney *et al.*, 2017), que indica a espessura da faixa de incerteza (Figura 3). O ideal é que a confiabilidade se aproxime ao máximo do valor do intervalo de incerteza considerado, com um menor valor possível para o índice de precisão. Além destes índices, a qualidade da faixa de incerteza foi avaliada a partir da proximidade dos resultados do gráfico quantil-quantil (QQ) da linha 1:1 (detalhe na Figura 3 – para maiores explicações sobre a utilização do gráfico QQ na análise da faixa de incerteza, ver Thyer *et al.*, 2009).

De maneira geral, o valor do índice de precisão aumentou com o aumento de complexidade do modelo para os resíduos (Figura 3). Porém, a confiabilidade para diferentes intervalos de incerteza foi aprimorada, com exceção da L5 (Figura 2). A utilização da L5 superestimou a faixa de incerteza, especialmente para os valores após os picos. Este resultado pode ter sido consequência da utilização dos resíduos brutos no modelo autoregressivo.

A função de verossimilhança que não trata separadamente os resíduos nulos (L1) resultou em uma menor incerteza nas simulações, porém superestimando a incerteza para valores próximos a zero e subestimando a incerteza para valores mais altos (Figura 3). As funções de verossimilhança L3 e L4 resultaram em uma faixa de incerteza mais adequada, o que pode ser observado a partir da proximidade dos resultados do gráfico QQ da linha 1:1 (detalhe na Figura 3) e da proximidade da confiabilidade do valor de intervalo de incerteza considerado (Figura 2).

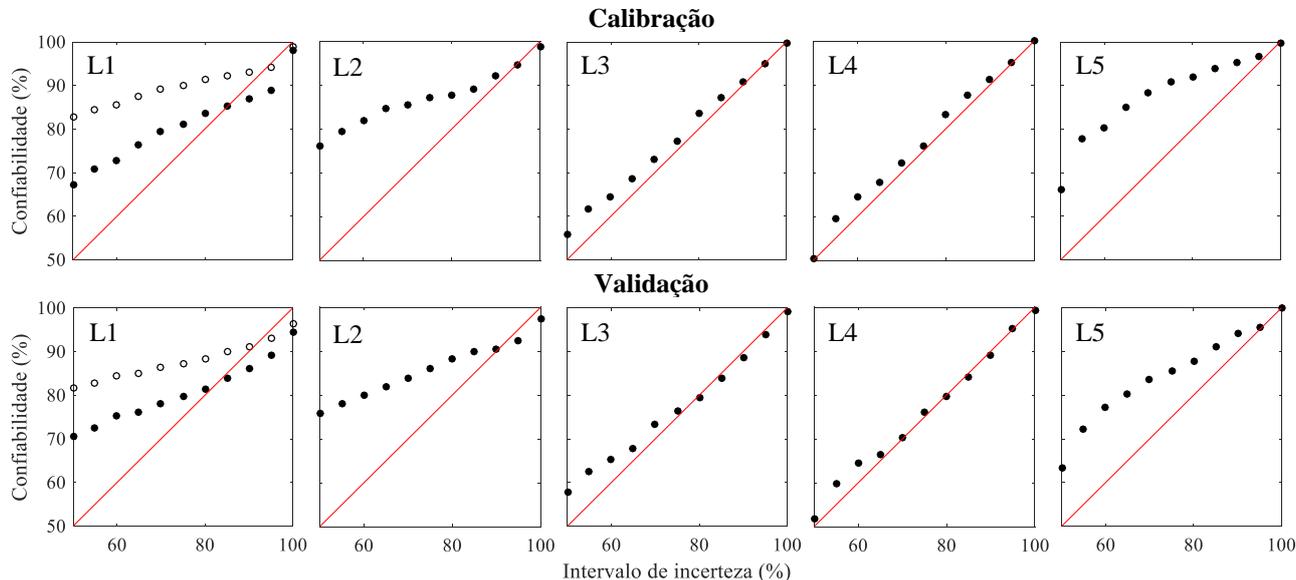


Figura 2. Confiabilidade do intervalo de incerteza para as diferentes funções de verossimilhança consideradas (L1 a L5) para os períodos de calibração e validação. Para as funções de verossimilhança que consideram uma distribuição dos resíduos inflada com zeros (L2 a L5) apenas as observações simuladas com erro não nulo foram consideradas.

Análise dos resíduos

Para verificação do cumprimento das premissas de cada uma das funções de verossimilhança testadas, os resíduos foram analisados em termos de ajuste à distribuição assumida, variância em função do valor de chuva interna simulado e autocorrelação (Figura 4). Como era esperado, a presença de muitas observações nulas resultou em uma distribuição dos resíduos inflada em torno de zero para L1. A utilização de L2 não foi suficiente para que os resíduos se adequassem à distribuição gaussiana assumida inicialmente. Quando a heteroscedasticidade foi considerada (L3, L4

e L5), um melhor ajuste dos resíduos à distribuição assumida foi obtida. Por outro lado, verifica-se que a variância não fica constante conforme o valor simulado de chuva interna, sendo maior para valores próximos de zero. A falha da utilização de um modelo linear para a variância dos resíduos em séries com muitos valores próximos a zero também foi constatada por Evin *et al.* (2013). A utilização de um modelo autoregressivo de primeira ordem não foi suficiente para remover a autocorrelação dos resíduos.

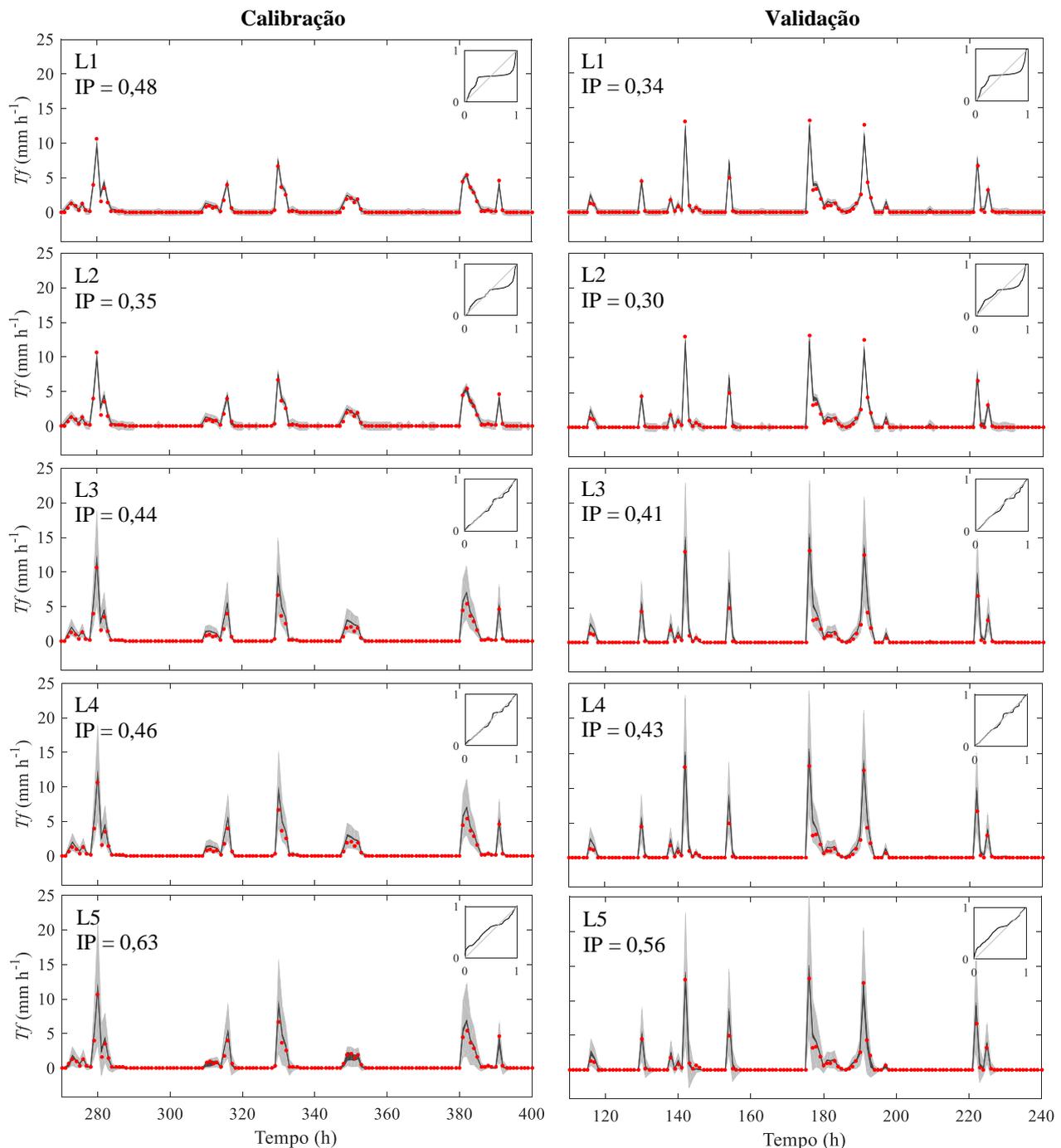


Figura 3. Incerteza das simulações de chuva interna (T_f): série de dados observados (pontos vermelhos), intervalo de 90% da incerteza total (cinza claro) e associada aos parâmetros (cinza escuro) para cada uma das funções de verossimilhança analisadas (L1 a L5). Apenas uma parte da série de calibração (esquerda) e validação (direita) é apresentada para facilitar a visualização dos resultados. No detalhe, gráfico quantil-quantil (QQ) dos quantis observados em função dos quantis teóricos de uma distribuição uniforme $U[0,1]$. IP é o índice de precisão (adimensional).

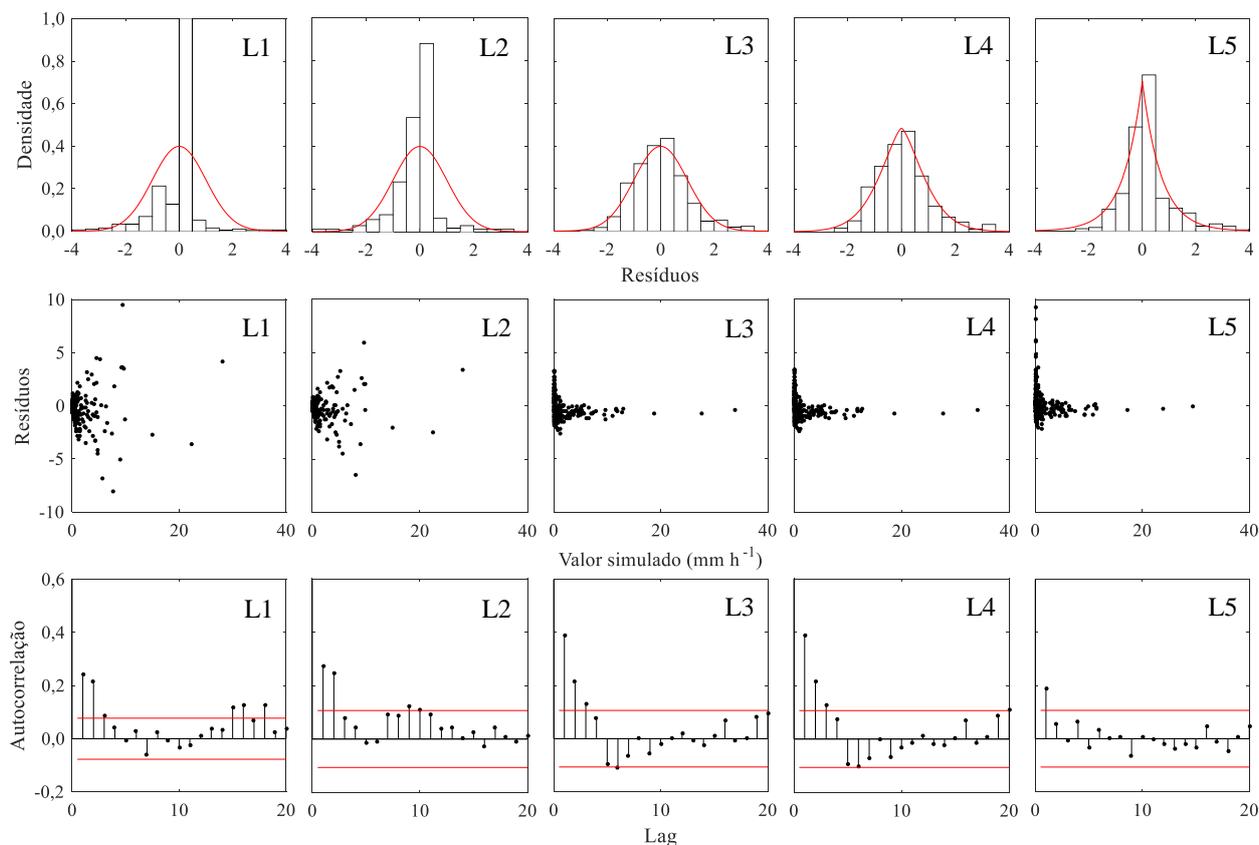


Figura 4. Análise dos resíduos para cada uma das funções de verossimilhança (L1 a L5). Painel superior: distribuição dos resíduos (barras) e distribuição assumida (em vermelho). Painel central: resíduos em função da chuva interna simulada. Painel inferior: correlograma da autocorrelação total. Para as funções de verossimilhança que consideram uma distribuição dos resíduos inflada com zeros (L2 a L5) apenas os resíduos não nulos foram considerados.

CONCLUSÕES

Neste trabalho nós propusemos uma modificação da *Generalized Likelihood function* apresentada por Schoups e Vrugt (2010) que amplia a sua aplicabilidade para situações em que a série observada apresenta muitas observações nulas. A utilização de uma distribuição não gaussiana para os resíduos não promoveu melhorias significativas quando apenas heteroscedasticidade é considerada. Contudo, foi verificada a necessidade de consideração de curtose da distribuição quando um modelo autoregressivo para os resíduos é incorporado. Além de sua aplicabilidade na modelagem de interceptação, estudos de geração de vazão em encostas, modelagem hidrológica em bacias de cabeceira, bacias efêmeras ou com vazão intermitente podem beneficiar de sua utilização.

O uso de diferentes funções de verossimilhança foi avaliado em termos do impacto causado na inferência dos parâmetros e na estimativa da incerteza associada aos resultados das simulações. A utilização de uma função de verossimilhança com modelo para os resíduos cujas premissas sejam pelo menos parcialmente satisfeitas melhora a qualidade da incerteza estimada e transmite uma maior confiabilidade aos valores dos parâmetros obtidos.

Nenhuma função de verossimilhança conseguiu atender a todos os requisitos analisados, avaliados em termos da qualidade da faixa de incerteza e da verificação das premissas sobre os resíduos. As funções de verossimilhança que consideram heteroscedasticidade e uma distribuição dos resíduos inflada com zeros apresentaram melhores resultados. A incorporação de um modelo autoregressivo para os resíduos piorou a qualidade da faixa de incerteza estimada, e não foi suficiente para remover toda autocorrelação. A dificuldade da consideração de um modelo autoregressivo (L5), cujo parâmetro resultou em correlação com os outros parâmetros calibrados, evidencia a necessidade de estudos mais aprofundados nesta área.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelas bolsas de estudo concedidas aos primeiro e terceiro autores.

REFERÊNCIAS

- CHENG, Q. B.; CHEN, X.; XU, C. Y.; REINHARDT-IMJELA, C.; SCHULTE, A. (2014). Improvement and comparison of likelihood functions for model calibration and parameter uncertainty analysis within a Markov chain Monte Carlo scheme. *J. Hydrol.* 519, pp. 2202–2214.
- EVIN, G.; KAVETSKI, D.; THYER, M.; KUCZERA, G. (2013). Pitfalls and improvements in the joint inference of heteroscedasticity and autocorrelation in hydrological model calibration. *Water Resour. Res.* 49(7), pp. 4518–4524.
- KAVETSKI, D.; FENICIA, F.; CLARK, M. P. (2011). Impact of temporal data resolution on parameter inference and model identification in conceptual hydrological modeling: Insights from an experimental catchment. *Water Resour. Res.* 47(5), pp. 1–25.
- MCINERNEY, D.; THYER, M.; KAVETSKI, D.; LERAT, J.; KUCZERA, G. (2017). Improving probabilistic prediction of daily streamflow by identifying Pareto optimal approaches for modeling heteroscedastic residual errors. *Water Resour. Res.* 53, pp. 2199–2239.
- MOTA, A. DE A.; GRISON, F.; GIGLIO, J. N.; KOBAYAMA, M. (2017). Instalação de uma pequena bacia experimental florestal: estudo de caso da bacia do Rio Araponga. *Eng. Sanit. Ambient.* 22(1), pp. 73–80.
- RUTTER, A. J.; KERSHAW, K. A.; ROBINS, R. C.; MORTON, A. J. (1971). A predictive model of rainfall interception in forests. 1. Derivation of the model from observations in a plantation of corsican pine. *Agr. Forest Meteorol.* 9, pp. 367–384.
- SÁ, J. H. M. (2015). *Monitoramento e modelagem do processo de interceptação da chuva de uma bacia coberta por Floresta Ombrófila Mista*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 129 p.
- SCHOUPS, G.; VRUGT, J. A. (2010). A formal likelihood function for parameter and predictive inference of hydrologic models with correlated, heteroscedastic, and non-Gaussian errors. *Water Resour. Res.* 46(10), pp. 1–17.
- SMITH, T.; MARSHALL, L.; SHARMA, A. (2015). Modeling residual hydrologic errors with Bayesian inference. *J. Hydrol.* 528, pp. 29–37.
- SMITH, T.; SHARMA, A.; MARSHALL, L.; MEHROTRA, R.; SISSON, S. (2010). Development of a formal likelihood function for improved Bayesian inference of ephemeral catchments. *Water Resour. Res.* 46(12), pp. 1–11.
- THYER, M.; RENARD, B.; KAVETSKI, D.; KUCZERA, G.; FRANKS, S. W.; SRIKANTHAN, S. (2009). Critical evaluation of parameter consistency and predictive uncertainty in hydrological modeling: A case study using Bayesian total error analysis. *Water Resour. Res.* 45(12).
- VRUGT, J. A. (2016). Markov chain Monte Carlo simulation using the DREAM software package: Theory, concepts, and MATLAB implementation. *Environmental Modelling and Software* 75, pp. 273–316.
- VRUGT, J. A.; DEKKER, S. C.; BOUTEN, W. (2003). Identification of rainfall interception model parameters from measurements of throughfall and forest canopy storage. *Water Resour. Res.* 39(9), pp. 1251.
- VRUGT, J. A.; TER BRAAK, C. J. F.; CLARK, M. P.; HYMAN, J. M.; ROBINSON, B. A. (2008). Treatment of input uncertainty in hydrologic modeling: Doing hydrology backward with Markov chain Monte Carlo simulation. *Water Resour. Res.* 44, pp. 1–52.
- VRUGT, J. A.; TER BRAAK, C. J. F.; DIKS, C. G. H.; ROBINSON, B. A.; HYMAN, J. M.; HIGDON, D. (2009). Accelerating Markov Chain Monte Carlo Simulation by Differential Evolution with Self-Adaptive Randomized Subspace Sampling. *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 10(3), pp. 273–290.